

PROBLEMAS

2. Obtenha os limites

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{49 - x^2}{7 + x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 - x}{25 - x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - 3x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2x^2 + x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$

g) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 2}$

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

j) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

k) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

l) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 5x + 6}$

m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 1}$

n) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 + 3x + 2}$

3.3 LIMITES INFINITOS

Consideremos a função $f(x) = \frac{5}{x - 3}$ definida para todos os números reais diferentes de 3.

3. Vejamos o que acontece com $f(x)$ na vizinhança de 3.

Calculemos o limite de $f(x)$ quando x tende a 3 pela direita: vamos atribuir a x os valores de uma sucessão que convirja para 3 pela direita, por exemplo:

(3,1; 3,01; 3,001; 3,0001;)

As correspondentes imagens são:

$$f(3,1) = \frac{5}{0,1} = 50;$$

$$f(3,01) = \frac{5}{0,01} = 500;$$

$$f(3,001) = \frac{5}{0,001} = 5.000;$$

$$f(3,0001) = \frac{5}{0,0001} = 50.000$$

Observamos que as imagens vão ficando cada vez maiores, superando qualquer valor fixado. Dizemos, neste caso, que o limite de $f(x)$, quando x tende a 3 pela direita, é infinito e escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5}{x-3} = \infty$$

Analogamente, para calcularmos o limite de $f(x)$ pela esquerda, vamos atribuir a x por exemplo, os valores:

$$(2,9; 2,99; 2,999; 2,9999; \dots)$$

As correspondentes imagens são:

$$f(2,9) = \frac{5}{-0,1} = -50$$

$$f(2,99) = \frac{5}{-0,01} = -500$$

$$f(2,999) = \frac{5}{-0,001} = -5.000$$

$$f(2,9999) = \frac{5}{-0,0001} = -50.000$$

Observamos que as imagens vão diminuindo cada vez mais, ficando abaixo de qualquer valor fixado. Dizemos que o limite de $f(x)$ é menos infinito, quando x tende a 3 pela esquerda, e escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{5}{x-3} = -\infty$$

De um modo geral, o limite de uma função é infinito, quando os valores de $f(x)$ vão ficando cada vez maiores, superando qualquer valor fixado; da mesma forma, dizemos que o limite de uma função é menos infinito, quando os valores de $f(x)$ vão ficando cada vez menores, de modo a se situarem abaixo de qualquer valor fixado.

PROBLEMAS

3. Para cada função $f(x)$ abaixo, calcule $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, quando existirem:

a) $f(x) = \frac{4}{x-6}$, $a = 6$

b) $f(x) = \frac{3}{1-x}$, $a = 1$

c) $f(x) = \frac{2}{|x-5|}$, $a = 5$

d) $f(x) = \frac{x+5}{x}$, $a = 0$

e) $f(x) = \frac{x}{2-x}, a = 2$

f) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}, a = 1$

g) $f(x) = \frac{1}{x}, a = 0$

h) $f(x) = \frac{1}{x^2}, a = 0$

i) $f(x) = \frac{-1}{x^2}, a = 0$

j) $f(x) = \frac{1}{x^3}, a = 0$

k) $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}, a = 0$

l) $f(x) = 5x + \frac{3}{x-2}, a = 2$

m) $f(x) = \frac{5x}{(x-1)^2}, a = 1$

n) $f(x) = \frac{1}{5x(x-1)^2}, a = 1$

o) $f(x) = \frac{4x}{(x-3)^2}, a = 3$

p) $f(x) = \frac{1}{4x(x-3)^2}, a = 3$

3.4 LIMITES NOS EXTREMOS DO DOMÍNIO

Quando fizemos o estudo das funções no Capítulo 2, vimos a importância de conhecer o comportamento de uma função quando x era muito grande (tendendo para infinito) ou muito pequeno (tendendo para menos infinito). Na verdade o que queríamos era determinar os valores dos limites, chamados limites nos extremos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

A maneira de obtermos esses limites consiste em escolher uma sucessão que divirja para mais infinito, ou simplesmente para infinito (∞), ou menos infinito ($-\infty$) e determinarmos o comportamento da nova sucessão gerada por $f(x)$.

EXEMPLO 3.5 Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x}$ e tomemos uma seqüência que divirja para infinito, por exemplo, (10; 100; 1000; 10000; ...; 10^n ; ...).

As correspondentes imagens são:

$$f(10) = \frac{1}{10} = 0,1,$$

$$f(100) = \frac{1}{100} = 0,01,$$

$$f(1000) = \frac{1}{1000} = 0,001,$$

$$f(10000) = \frac{1}{10000} = 0,0001, \dots$$

Intuitivamente, percebemos que as correspondentes imagens convergem para 0. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende para infinito é 0 e escrevemos:

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Analogamente, para determinarmos o limite de $f(x)$ quando x tende para menos infinito, tomemos uma sequência que divirja para menos infinito, por exemplo, $(-10; -100; -1.000; \dots; -(10)^n \dots)$. As correspondentes imagens são:

$$f(-10) = \frac{1}{-10} = -0,1,$$

$$f(-100) = \frac{1}{-100} = -0,01,$$

$$f(-1.000) = \frac{1}{-1000} = -0,001,$$

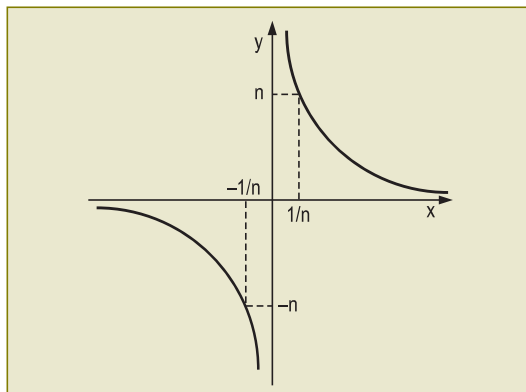
$$f(-10.000) = \frac{1}{-10000} = -0,0001, \dots$$

Percebemos intuitivamente que as imagens também convergem para 0. Dizemos então que o limite de $f(x)$ é 0 quando x tende a menos infinito, e escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

O gráfico de $f(x)$ é dado na Figura 3.6, em que fica evidente os limites calculados.

FIGURA 3.6 Gráfico da função $f(x) = 1/x$

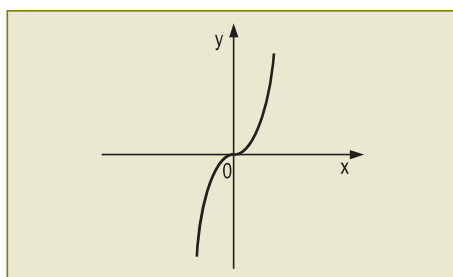


EXEMPLO 3.6 Consideremos a função $f(x) = x^3$. Se considerarmos as mesmas sucessões divergentes para mais e menos infinito dadas no exemplo anterior, poderemos concluir que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Conforme vimos no capítulo 2, o gráfico de $f(x)$ é dado pela Figura 3.7, em que se evidenciam os limites calculados.

FIGURA 3.7 Gráfico da função $f(x) = x^3$



Observações:

- Os limites nos extremos (x tendendo a mais ou menos infinito) podem ser um número real, ou ainda podem dar mais ou menos infinito, conforme os exemplos anteriores mostraram.
- Há funções cujos limites nos extremos não existem, como por exemplo a função $f(x) = \sin x$, pois $f(x)$ oscila entre -1 e 1 à medida que x tende para mais ou menos infinito.
- O limite nos extremos de uma função polinomial é igual ao limite de seu termo de maior expoente, pois colocando-se esse termo em evidência, todos os outros termos tendem a 0. Isso pode ser constatado no seguinte exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 + 4x^2 - 5x + 9) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^3 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{2x^2} + \frac{9}{2x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^3 = \infty$$

pois todos os termos (exceto o primeiro) entre parênteses tem limite igual a 0 quando x tende a infinito.

- Como consequência da observação anterior, quando tivermos o limite nos extremos de um quociente de dois polinômios, ele será igual ao limite do quociente dos termos de maior expoente do numerador e do denominador. Assim, por exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{2x^2 - 8x - 17} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \infty$$

PROBLEMAS

4. Calcule os seguintes limites

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^4$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^5$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^5$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4 - 3x^3 + x + 6)$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^4 - 3x^3 + x + 6)$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^5 - 3x^2 + 6)$

l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 - 3x^2 + 6)$

m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 1}{5x^2 + 2x - 1}$

n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 1}{5x^2 + 2x - 1}$

o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3 + 2x^2 + 5}{x + 1}$

p) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x - 3}$

q) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x - 3}$

r) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{25x - 2}{16x - 3}$

s) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 - 5x}$

t) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 + 3}$

u) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

v) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 1}{-2x^2 + 5x - 1}$

w) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^2}{3 - 4x}$

x) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 2x}{3 - 4x}$

3.5 CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

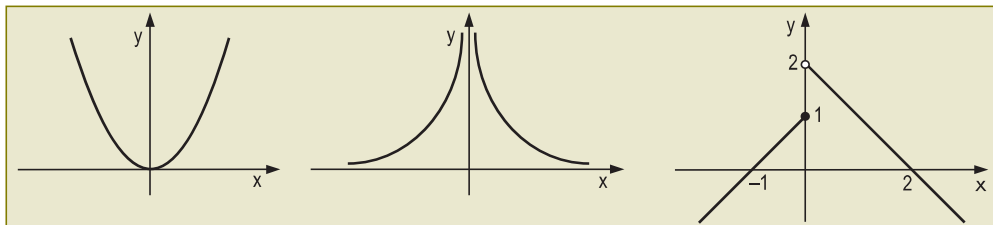
Intuitivamente, a idéia de função contínua decorre da análise de seu gráfico. Quando o gráfico de uma função não apresenta interrupções, dizemos que ela é contínua. Se houver algum ponto onde ocorre a interrupção, dizemos que é um ponto de descontinuidade.

A fim de tornarmos mais formal esse conceito, observemos as funções que estão na Figura 3.8.

Temos as seguintes considerações a fazer:

- Para a função $f_1(x)$, cujo gráfico é uma parábola, para qualquer valor real de b , temos,

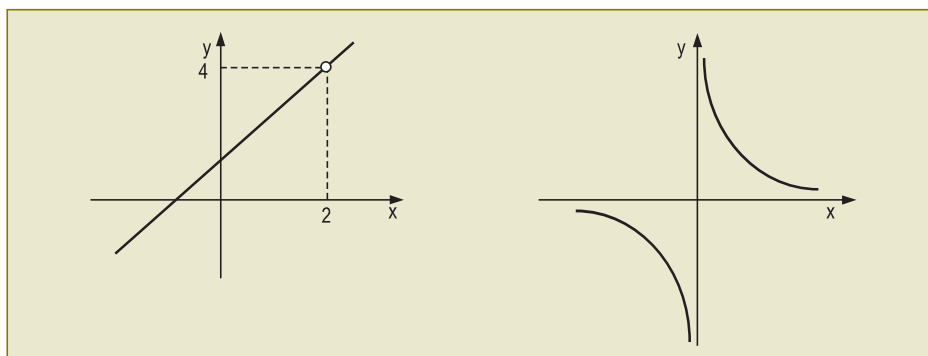
FIGURA 3.8 Algumas funções reais



a) $f_1(x) = x^2$

b) $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$

c) $f_3(x) = \begin{cases} x+1 & \text{para } x \leq 0 \\ -x+2 & \text{para } x > 0 \end{cases}$



d) $f_4(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

e) $f_5(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow b^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f_1(x) = f_1(b)$$

ou seja, o limite existe, para x tendendo a b e, além disso, ele é igual ao valor da função em b .

► Para a função $f_2(x)$, se calcularmos o limite para x tendendo a zero, veremos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f_2(x) = \infty$$

ou seja, o limite existe, para x tendendo a 0, mas não é igual ao valor da função para $x = 0$, pois 0 está fora do domínio.

► Para a função $f_3(x)$, se calcularmos o limite para x tendendo a zero, veremos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f_3(x) = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x) = 2$$

ou seja, não existe o limite da função para $x = 0$.

- Para a função $f_4(x)$, se calcularmos o limite para x igual a 2, teremos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f_4(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f_4(x) = 4$$

ou seja, o limite existe para x tendendo a 2, mas a função não está definida para $x = 2$.

- Para a função $f_5(x)$, se calcularmos o limite para x tendendo a zero, teremos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_5(x) = \infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} f_5(x) = -\infty$$

ou seja, não existe o limite da função para x tendendo a zero.

Pela análise dos gráficos vemos que, com exceção de $f_1(x)$, todas as outras funções apresentam interrupções em algum ponto. No caso da função $f_1(x)$, o que caracteriza a ausência de interrupções é o fato de o limite existir em qualquer ponto b do domínio e além disso, desse limite ser igual à imagem de b .

Isso sugere a seguinte definição:

Uma função $f(x)$ é *contínua em um ponto b* , se:

$$\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

Caso a função não seja contínua no ponto b diremos que ela é *descontínua* nesse ponto.

Em resumo, temos:

- $f_1(x)$ é contínua em todos os pontos do domínio,
- $f_2(x)$ é descontínua para $x = 0$,
- $f_3(x)$ é descontínua para $x = 0$,
- $f_4(x)$ é descontínua para $x = 2$,
- $f_5(x)$ é descontínua para $x = 0$.

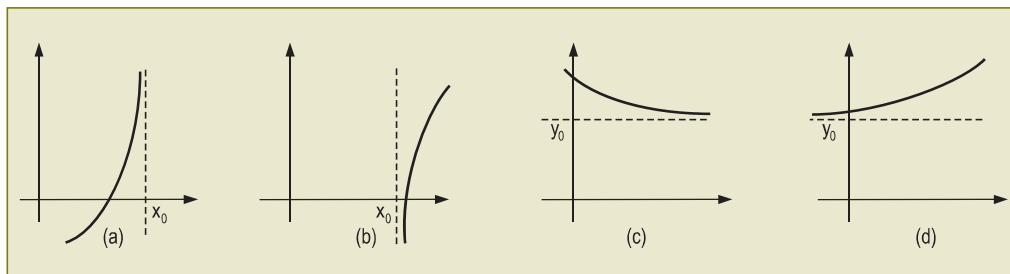
É importante observarmos que, para a função ser contínua, é necessário que existam $f(b)$ e $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ e que sejam iguais. Além disso, pode-se verificar que, se duas funções f e g são contínuas em b , então também serão contínuas: $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $k \cdot f$ (em que k é uma constante) e f/g (desde que $g(b) \neq 0$).

3.6 ASSÍNTOTAS VERTICAIS E HORIZONTAIS

Consideremos os gráficos das funções dadas na Figura 3.9:

No casos (a) e (b), dizemos que a reta de equação $x = x_0$ é uma *assíntota vertical* daquelas funções.

FIGURA 3.9 Assíntotas



Nos casos (c) e (d), dizemos que a reta horizontal de equação $y = y_0$ é uma *assíntota horizontal* das correspondentes funções.

Formalmente, podemos dizer que, se existir um número x_0 tal que um dos limites laterais de x_0 seja infinito, ou menos infinito, então a reta $x = x_0$ é uma assíntota vertical da função considerada. Geralmente x_0 é um ponto de descontinuidade da função.

Se existirem os limites: $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c_1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c_2$$

então as retas $y = c_1$ e $y = c_2$ são chamadas de assíntotas horizontais da função considerada.

EXEMPLO 3.7 Consideremos a função $f(x) = \frac{5x+3}{x-2}$. Como para $x = 2$ ela não está definida, temos:

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, então a reta $x = 2$ é uma assíntota vertical de $f(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$, então a reta $y = 5$ é uma assíntota horizontal de $f(x)$.

3.7 LIMITE EXPONENCIAL FUNDAMENTAL

Consideremos a função $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ que aparece em curvas de crescimento em geral. À medida que x cresce, tendendo a infinito, a fração $\frac{1}{x}$ tende a zero. Entretanto tal fração somada a 1 e o resultado elevado a x não tem um valor de convergência evidente.

O matemático suíço Leonardo Euler (1707–1783) parece ter sido o primeiro a perceber a importância dessa função. Além disso, ele demonstrou que o limite daquela função para x tendendo a infinito era um número irracional compreendido entre 2 e 3,

TABELA 3.1 Limite exponencial fundamental

x	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
1	2
2	2,250000
5	2,488320
10	2,593742
20	2,653298
50	2,691588
100	2,704814
200	2,711517
500	2,715569
1.000	2,716924
5.000	2,718010
50.000	2,718255
100.000	2,718268
1.000.000	2,718280

simbolizado por e (número de Euler). Usando uma calculadora é possível ter uma idéia da convergência da função $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$; a Tabela 3.1 fornece alguns valores de $f(x)$:

Pode-se provar ainda que o limite da função $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ também dá o número e quando x tende a menos infinito. Em resumo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Uma forma equivalente de escrever o número e é pelo seu limite: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$. Isto é:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

EXEMPLO 3.8 Juros capitalizados continuamente

Consideremos um capital de \$ 1.000,00 aplicado a juros compostos a taxa de 12% ao ano, pelo prazo de 2 anos.

- Se os juros forem capitalizados anualmente, o montante será

$$M = 1.000(1 + 0,12)^2 = 1.254,40$$

- Se os juros forem capitalizados semestralmente a uma taxa semestral proporcional a 12% ao ano, a taxa semestral será de $\frac{12\%}{2} = 6\%$ ao semestre, e o montante será:

$$M = 1.000 (1 + 0,06)^4 = 1.262,48$$

- Se os juros forem capitalizados mensalmente a uma taxa mensal proporcional a 12% ao ano, a taxa mensal será de $\frac{12\%}{12} = 1\%$ ao mês, e o montante será:

$$M = 1.000(1 + 0,01)^{24} = 1.269,73$$

- Se os juros forem capitalizados diariamente a uma taxa diária proporcional a 12% ao ano, (considerando um ano de 360 dias), será de $\frac{12\%}{360}$ ao dia, e o montante será:

$$M = 1.000 \left(1 + \frac{0,12}{360} \right)^{720} = 1.271,20$$

Poderíamos pensar em capitalização por hora, por minuto, por segundo etc. Cada vez que diminui o prazo de capitalização, o número de capitalizações (k) em um ano aumenta, de modo que a taxa proporcional a 12% ao ano, nesse período de capitalização, é igual a $\frac{12\%}{k}$ e o prazo de aplicação de 2 anos expresso de acordo com o prazo de capitalização vale $2k$. Conseqüentemente, o montante é dado por:

$$M = 1.000 \left(1 + \frac{0,12}{k} \right)^{2k}$$

Dizemos que o capital é *capitalizado continuamente*, quando o montante M é dado por:

$$M = \lim_{k \rightarrow \infty} 1.000 \left(1 + \frac{0,12}{k} \right)^{2k}$$

Para calcularmos tal limite, podemos chamar $\frac{0,12}{k}$ de $\frac{1}{x}$ e conseqüentemente x será igual a $\frac{k}{0,12}$. Quando k tende a infinito, x também tende, de modo que o limite acima pode ser expresso por:

$$M = \lim_{x \rightarrow \infty} 1.000 \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2 \cdot (0,12) \cdot x}$$

$$= 1.000 \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]^{2(0,12)} = 1.000 \cdot e^{2(0,12)} = 1.271,25$$

pois a expressão entre colchetes é o limite exponencial fundamental.

De um modo geral, se um capital C é capitalizado continuamente a uma taxa proporcional a uma taxa i anual, pelo prazo de n anos, o montante é dado por:

$$M = C \cdot e^{i \cdot n}$$

PROBLEMAS

5. A função $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{se } x \leq 3 \\ 3x-4, & \text{se } x > 3 \end{cases}$ é contínua no ponto $x = 3$?
6. A função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{se } x \neq 2 \\ 10, & \text{se } x = 2 \end{cases}$ é contínua para $x = 2$?
7. Verifique se a função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 3, & \text{se } x = 1 \end{cases}$ é contínua para $x = 1$.
8. Determine k , de modo que a função $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{se } x \neq 2 \\ k, & \text{se } x = 2 \end{cases}$ seja contínua para $x = 2$.
9. Dada a função $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
 - a) determine a assíntota vertical no ponto $x = -1$;
 - b) determine as assíntotas horizontais.
10. Dada a função $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$
 - a) determine a assíntota vertical no ponto $x = 1$;
 - b) determine as assíntotas horizontais.
11. Dada a função $f(x) = \log x$, determine a assíntota vertical para $x = 0$.
12. Dada a função $f(x) = 2^x$ determine a assíntota horizontal.
13. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x}{3}}$