

3. OPERAÇÕES COM EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

3.1. Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão de expressões literais

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Efetuar as operações indicadas em cada um dos casos seguintes:

- 1) $(4b + 3c - a) + (4a - 3b - 2c)$
- 2) $(5ab - 3c + 4d) + (-2d + 3c - 4ab)$
- 3) $(xy - 3x^2 + 1) + (3 + 5x^2 - 3xy)$
- 4) $(\frac{1}{2}xy^2 - 2x + y) + (4x - 2y + \frac{1}{4}x^2y)$
- 5) $(5xy - x^3 + 4y) + (5 + 2x^3 - 4y - 6xy)$
- 6) $(10x + 20y) - (5x + 15y)$
- 7) $(xy^3 - 2xy + 1) - (4xy + 5 + 2xy^3)$
- 8) $(x^2 + 2xy + 3y^2) - (x^2 - 2xy + 3y^2)$
- 9) $(\frac{1}{4}xy - 3x^2 + 10y^2) - \frac{1}{4}(xy - \frac{1}{3}x^2 + y^2)$
- 10) $(-x^3 + 2xy + 4) - (2x^3 + 2xy + 8)$
- 11) $(4x^2 - 3y + xy) + (3y - xy + 2x^2) - (xy - x^2)$
- 12) $-2(x - y + z^2) + 4(z^2 + y - x) + (1 - x - y)$
- 13) $(\frac{3}{5}x^2y - 2zh) + (1 + 2zh + \frac{2}{5}x^2y) - (x^2y + 1)$
- 14) $(5a) - (-7c)$
- 15) $(4a^2b) - (-7ab^2)$
- 16) $(-5xy^3) - (-7x^3y)$
- 17) $(\frac{4}{5}xy)^2 (4x)$
- 18) $(x + y^2 + 4) (x + 1)$
- 19) $(x^2 + 2y) (3x - 2y)$
- 20) $(x + y) (x - y)$
- 21) $(4x - 3y) (4x + 3y)$
- 22) $4x^2 (3x - 2y + 5)$
- 23) $\frac{2}{5}x^2 (1 - 2x^3 + \frac{1}{4}x)$

- 24) $xy (x^2 - y^2)$
- 25) $(x^2y - 3xy^2) (4xy)$
- 26) $(x + y - z) (-x + y + z)$
- 27) $(x - y) (x + y) (2z)$
- 28) $(\frac{4}{3}xy^2 - 1) (2x - xy^2)$
- 29) $(-\frac{4}{5}x + 2y) (2y + \frac{5}{4}x)$
- 30) $(8x^2) \div (4x^2)$
- 31) $(xy) \div (4xy^2)$
- 32) $4x^2y^3 \div 10xy^3$
- 33) $3a^2b^4 \div 5a^4b^2$
- 34) $(5x^2y^3 + 4x^4y - 3xy^2) \div (2xy)$
- 35) $(\frac{1}{5}x^3y + 4x + \frac{1}{8}y) \div \frac{5}{8}x^2y$
- 36) $(a^{2n} + b^{2n+1}) \div (4a^{-n})$
- 37) $\frac{5x + y}{4} \div \frac{7}{5x + y}$
- 38) $[4x(y^2 - 2y)] \div 12xy$
- 39) $(4xy - 2)^2 \div 16xy$
- 40) $(12x^3y^5 - 16x^4y^3 + 20x^5y^2) \div (4x^2y)$
- 41) $(x^4 - 16) \div (x + 2)$
- 42) $(3xy)^{-1} \div 4xy^2$
- 43) $3x^2y^3 \div (3xy^2)^{-2}$
- 44) $(-\frac{1}{4}xy^2 + 10xy) \div (-\frac{1}{10}x^2y)$

RESPOSTAS

- 1) $3a + b + c$
- 2) $ab + 2d$
- 3) $-2xy + 2x^2 + 4$
- 4) $\frac{1}{2}xy^2 + 2x - y + \frac{1}{4}x^2y$
- 5) $-xy + x^3 + 5$
- 6) $5x + 5y$
- 7) $-xy^3 - 6xy - 4$
- 8) $4xy$
- 9) $-\frac{35}{12}x^2 + \frac{39}{4}y^2$
- 10) $-3x^3 - 4$
- 11) $7x^2 - xy$

- 12) $-7x + 5y + 2z^2 + 1$ 13) 0 14) $-35ac$
 15) $-28a^3b^3$ 16) $35x^4y^4$ 17) $\frac{64}{25}x^3y^2$
 18) $x^2 + xy^2 + 5x + y^2 + 4$ 19) $3x^3 - 2x^2y + 6xy - 4y^2$ 20) $x^2 - y^2$
 21) $16x^2 - 9y^2$ 22) $12x^3 - 8x^2y + 20x^2$ 23) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{10}x^3$
 24) $x^3y - xy^3$ 25) $4x^3y^2 - 12x^2y^3$ 26) $-x^2 + 2zx + y^2 - z^2$
 27) $2zx^2 - 2zy^2$ 28) $\frac{8}{3}x^2y^2 - 2x - \frac{4}{3}x^2y^4 + xy^2$
 29) $\frac{9}{10}xy - x^2 + 4y^2$ 30) 2 31) $\frac{1}{4y}$
 32) $\frac{2x}{5}$ 33) $\frac{3b^2}{5a^2}$ 34) $\frac{5xy^2}{2} + 2x^3 - \frac{3}{2}y$
 35) $\frac{8}{25}x + \frac{32}{5xy} + \frac{1}{5x^2}$ 36) $\frac{a^{3n}}{4} + \frac{b^{2n+1} \cdot a^n}{4}$
 37) $\frac{25x^2 + 10xy + y^2}{28}$ 38) $\frac{y-2}{3}$ 39) $xy - 1 + \frac{1}{4xy}$
 40) $3xy^4 - 4x^2y^2 + 5x^3y$ 41) $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ 42) $\frac{1}{12x^2y^3}$
 43) $27x^4y^7$ 44) $\frac{5y}{2x} - \frac{100}{x}$

3.2. Produtos Notáveis

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Desenvolver os produtos indicados:

- 1) $(x+1)^2$ 2) $(2x+5)^2$
 3) $(1+2y)^2$ 4) $(3x+4y)^2$
 5) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)^2$ 6) $\left(\sqrt{2} + \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2$

- 7) $(x-1)^2$ 8) $(1-2y)^2$
 9) $(3x-5y)^2$ 10) $\left(\frac{4}{5}x - \frac{2}{3}y\right)^2$
 11) $\left(\frac{2x-3}{5}\right)^2$ 12) $\left(\frac{4-3x}{7}\right)^2$
 13) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ 14) $\left(\frac{1}{x} - y\right)^2$
 15) $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right)^2$ 16) $(x+1)^3$
 17) $(x-1)^3$ 18) $(2-x)^3$
 19) $\left(\frac{1}{2} + x\right)^3$ 20) $(2x-y)^3$
 21) $\left(\frac{1}{2} - 3xy\right)^3$ 22) $(-2x+4y)^3$
 23) $(\sqrt{2} + x)^3$ 24) $(4+x)(4-x)$
 25) $(x-3y)(x+3y)$ 26) $(1-3x)(3x+1)$
 27) $(-3+5x)(3+5x)$ 28) $(5y^2-1)(5y^2+1)$
 29) $(a+b+c)(a+b-c)$ 30) $(2x^4+1)(2x^4-1)$
 31) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ 32) $(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$
 33) $\left(\frac{1}{3-\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\frac{9-x}{3+\sqrt{x}}\right)$

RESPOSTAS

- 1) $x^2 + 2x + 1$ 2) $4x^2 + 20x + 25$ 3) $1 + 4y + 4y^2$
 4) $9x^2 + 24xy + 16y^2$ 5) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{16}$ 6) $2 + 2x + \frac{x^2}{2}$
 7) $x^2 - 2x + 1$ 8) $1 - 4y + 4y^2$ 9) $9x^2 - 30xy + 25y^2$
 10) $\frac{16}{25}x^2 - \frac{16}{15}xy + \frac{4}{9}y^2$ 11) $\frac{4x^2 - 12x + 9}{25}$
 12) $\frac{16 - 24x + 9x^2}{49}$ 13) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$ 14) $\frac{1}{x^2} - \frac{2y}{x} + y^2$
 15) $\frac{x^2}{4} - 1 + \frac{1}{x^2}$ 16) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ 17) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
 18) $8 - 12x + 6x^2 - x^3$ 19) $\frac{1}{8}x + \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}x^2 + x^3$

- 20) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$ 21) $\frac{1}{8} - \frac{9}{4}xy + \frac{27}{2}x^2y^2 - 27x^3y^3$
 22) $-8x^3 + 48x^2y - 96y^2x + 64y^3$ 23) $2\sqrt{2} + 6x + 3\sqrt{2}x^2 + x^3$
 24) $16 - x^2$ 25) $x^2 - 9y^2$ 26) $1 - 9x^2$
 27) $25x^2 - 9$ 28) $25y^4 - 1$ 29) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$
 30) $4x^{-8} - 1$ 31) $x - y$ 32) $x - 1$ 33) 1

3.3. Fatoração

Fatorar as expressões seguintes:

- 1) $2x + 4x$ 2) $2x + 4y$
 3) $3x - 9y + 12$ 4) $4x^2 - xy^2 + 3x$
 5) $x^4 - 3x^2$ 6) $\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}$
 7) $4xy - 3x^2y^2 + 10x^3y$ 8) $\frac{2}{3}x^2y^5 + \frac{4}{3}x^3y^4 - \frac{2}{3}x^5y^3$
 9) $10x^2 - 9x$ 10) $7xy + 21xz$
 11) $7xy + 21xz + 2hy + 6hz$ 12) $xy - 2x - 6 + 3y$
 13) $42x^3y - 70x^2y - 6x + 10$ 14) $36x^2 - 9$
 15) $16y^4 - 4x^2$ 16) $a^4 - b^4$
 17) $1 - x^2$ 18) $x^2 - 1$
 19) $-25x^2 + 36y^2$ 20) $49 - (x + y)^2$
 21) $16a^2 - \frac{1}{9}$ 22) $x^2 + 6x + 9$
 23) $x^2 + 2x + 1$ 24) $x^2 - 2x + 1$
 25) $x^2 - 8x + 16$ 26) $x^2 + x + \frac{1}{4}$
 27) $\frac{x^2}{4} - x + 1$ 28) $9x^4 - 30x^2 + 25$
 29) $1 - 6x + 9x^2$ 30) $4x^2 - 4xy + y^2$

RESPOSTAS

- 1) $6x$ 2) $2(x + 2y)$ 3) $3(x - 3y + 4)$
 4) $x(4x - y^2 + 3)$ 5) $x^2(x^2 - 3)$ 6) $x^4\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{4}\right)$
 7) $xy(4 - 3xy + 10x^2)$ 8) $\frac{2}{3}x^2y^3(y^2 + 2xy - x^3)$
 9) $x(10x - 9)$ 10) $7x(y + 3z)$ 11) $(y + 3z)(7x + 2h)$
 12) $(x + 3)(y - 2)$ 13) $2(7x^2y - 1)(3x - 5)$ 14) $9(2x - 1)(2x + 1)$
 15) $4(2y^2 - x)(2y^2 + x)$ 16) $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$
 17) $(1 - x)(1 + x)$ 18) $(x + 1)(x - 1)$ 19) $(6y - 5x)(6y + 5x)$
 20) $(7 - x - y)(7 + x + y)$ 21) $\left(4a - \frac{1}{3}\right)\left(4a + \frac{1}{3}\right)$ 22) $(x + 3)(x + 3)$
 23) $(x + 1)(x + 1)$ 24) $(x - 1)(x - 1)$ 25) $(x - 4)(x - 4)$
 26) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 27) $\left(\frac{x}{2} - 1\right)\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ 28) $(3x^2 - 5)(3x^2 - 5)$
 29) $(1 - 3x)(1 - 3x)$ 30) $(2x - y)(2x - y)$

3.4. Simplificação

Simplificar as expressões seguintes:

- 1) $\frac{6x}{3}$ 2) $\frac{4x + 6}{2}$
 3) $\frac{3x^2 + 9x}{3x}$ 4) $\frac{16xy^2 - 24x^2y}{xy}$
 5) $\frac{3x^4 - 10x^2}{x^5 - x^2}$ 6) $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$
 7) $\frac{x^2 - 16}{x + 4}$ 8) $\frac{x + 7}{x^2 - 49}$
 9) $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$ 10) $\frac{x^2 + 10x + 25}{x + 5}$
 11) $\frac{(x + 3)^2}{x^2 - 9}$ 12) $\frac{x^2 - 36}{(x - 6)^2}$
 13) $\frac{2x - 2}{(x - 1)^2}$ 14) $\frac{x^2 - 36}{x^2 + 6x}$
 15) $\frac{4}{1 - x} + \frac{5}{1 + x}$ 16) $\frac{x}{3 - x} + \frac{10x}{(3 - x)^2}$

— Se $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ a equação tem duas raízes reais distintas:

$$x = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}$$

$$x = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}$$

— Se $\Delta = B^2 - 4AC = 0$, a equação tem duas raízes reais e iguais.

$$x = -\frac{B}{2A}$$

— Se $\Delta = B^2 - 4AC < 0$, a equação não tem raízes reais.

Exemplos

1. $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -7 \\ C = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 1 \quad \therefore x = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{7 \pm 1}{2} \quad \therefore \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{7+1}{2} = 4 \\ x = \frac{7-1}{2} = 3 \end{array} \right.$$

2. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 6 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} A = 3 \\ B = -4 \\ C = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow B^2 - 4AC = -56$$

$\therefore$ a equação não tem raízes reais.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Resolva as seguintes equações do 2º grau:

- 1) $x^2 - 5x + 6 = 0$
- 2) $x^2 + 7x + 10 = 0$
- 3) $x^2 - 2x - 15 = 0$
- 4) $-x^2 + 10x - 21 = 0$
- 5) $x^2 - 4x + 4 = 0$
- 6) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

- 7) $x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{5}{2} = 0$
- 8) $x^3 + x = -1$
- 9) $3x^2 = 5x - 10$
- 10) $x^2 = -x$
- 11) $x^2 = 16$
- 12) $5x^2 + 1 = 0$
- 13) $\frac{1}{4}x^2 - 4x = -16$
- 14) $x^2 = 0$
- 15) $3x^2 = 0$
- 16) $x^2 = 5$
- 17) $3x^2 = 9$
- 18) $x^2 - 4x = 3x + 8$
- 19) $x^2 - 3x = 2x - 6$
- 20) $2x(x + 1) = 0$
- 21) $\frac{x(2x + 1)}{3} = 5$

RESPOSTAS

- 1) $x = 2$; $x = 3$
- 2) $x = -5$; $x = -2$
- 3) $x = -3$; $x = 5$
- 4) $x = 3$; $x = 7$
- 5) $x = 2$
- 6) $x = -\frac{1}{2}$
- 7) $x = \frac{1}{2}$; $x = 5$
- 8) não tem solução real.
- 9) não tem solução real.
- 10) $x = 0$; $x = -1$
- 11) $x = -4$; $x = 4$
- 12) não tem solução real.
- 13) $x = 8$
- 14) $x = 0$
- 15) $x = 0$
- 16) $x = -\sqrt{5}$; $x = +\sqrt{5}$
- 17) $x = -\sqrt{3}$; $x = +\sqrt{3}$
- 18) $x = -1$; $x = 8$
- 19) $x = 2$; $x = 3$
- 20) $x = 0$; $x = -1$
- 21) $x = -3$; $x = 2,5$

7. SINAL DO TRINÔMIO DO 2º GRAU

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

1. Se $\Delta = B^2 - 4AC > 0$, a equação $Ax^2 + Bx + C = 0$ tem duas raízes reais distintas, x' e x'' . Neste caso:

$$\text{sinal}(y) = \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \text{sinal}(A) \quad \text{sinal}(y) \neq \text{sinal}(A) \quad \xrightarrow{0} \text{sinal}(y) = \text{sinal}(A) \\ x' \qquad \qquad \qquad x'' \end{array}$$